Examen parcial de Análisis de Variable Compleja.
Cuarto curso de Matemáticas.
17 de Febrero de 1998.

1. Justifíquese que la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$f(z) = 2z - (1+z)\log(1+z) + (1-z)\log(1-z) \quad (z \neq \pm 1),$$

y $f(1) = 2 - 2\log(2) = -f(-1)$, es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ y, para todo $z \in \overline{D(0,1)}$, se verifica que:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)} \quad (|z| \geq 1).$$

Calcúlese, en particular, la suma de la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$.

2. Sea f una función continua en el disco unidad cerrado y holomorfa en su interior, tal que $f(z) = 0$ para todo $z = \exp(it)$ con $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Pruébese que $f(z) = 0$ para todo $z \in \overline{D(0,1)}$.

   Sugerencia: considérese la función $g(z) = f(z)f(iz)f(-iz)f(-z)$.

3. Sea f una función entera. Para $r > 1$ se define:

$$\lambda(r) = \frac{\log M(r)}{\log r}$$

donde $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Demuéstrese que f es una función polinómica si, y sólo si, λ tiene límite finito en $+\infty$.

4. Sea f una función no constante, continua en el disco unidad cerrado y holomorfa en su interior, tal que $|f(z)| = 1$ siempre que $|z| = 1$. Pruébese que $f(\overline{D(0,1)}) = \overline{D(0,1)}$
.

   Sugerencia: Sea $\mathcal{U} = f(D(0,1))$. Justifíquese que $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}} \cap D(0,1)$.

a) Ceros de una función holomorfa. Principio de identidad.

b) Propiedad de la media y principio de extremo para funciones armónicas.